■Ngày nhận bài: 03/7/2026 ■Ngày sửa bài: 30/7/2026 ■Ngày chấp nhận đăng: 20/8/2026

Phân tích tĩnh cho tấm composite nhiều lớp dựa trên hàm biến dạng cắt bậc ba Chebyshev sử dụng IGA

Static analysis of laminated composite plates using a chebyshev-based third-order shear deformation function and isogeometric analysis

> HUỲNH BÁ HỌC[1], NGUYỄN ĐỨC PHÁT[2], NGUYỄN THỊ BÍCH LIỄU[1,*]
[1]Khoa Xây dựng, Trường Đại học Công nghệ kỹ thuật TP.HCM
[2]Khoa Giao thông và Năng lượng, Trường Đại học Công nghệ kỹ thuật TP.HCM
[*]Email: lieuntb@hcmute.edu.vn

TÓM TẮT

Bài báo đề xuất một hàm biến dạng cắt bậc cao được xây dựng từ đa thức Chebyshev bậc ba kết hợp với phân tích đẳng hình học (IGA- Chebyshev) cho phân tích tĩnh tấm composite nhiều lớp. Hàm Chebyshev được lựa chọn nhờ khả năng mô tả linh hoạt sự phân bố biến dạng cắt theo chiều dày, đồng thời tận dụng các đặc tính trực giao và khả năng xấp xỉ tốt của đa thức Chebyshev, qua đó nâng cao độ chính xác của mô hình biến dạng cắt mà không cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt. Hàm cơ sở NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) trong IGA cho phép xây dựng trường chuyển vị có độ liên tục cao và mô tả chính xác hình học cũng như chuyển vị và ứng suất của tấm composite nhiều lớp. Kết quả số được so sánh với các hàm bậc cao khác và nghiệm chính xác 3D, cho thấy phương pháp IGA- Chebyshev đạt độ chính xác cao, hội tụ tốt và có khả năng mô tả hiệu quả đáp ứng tĩnh của tấm composite nhiều lớp.

Từ khóa: Đa thức Chebyshev; IGA; hàm cơ sở NURBS; HSDT; phân tích tĩnh; tấm composite nhiều lớp.

ABSTRACT

This study proposes a higher-order shear deformation function based on the third-order Chebyshev polynomial and integrated with isogeometric analysis (IGA- Chebyshev) for the static analysis of laminated composite plates. The Chebyshev function is employed owing to its ability to flexibly describe the through-thickness distribution of shear deformation, while exploiting the orthogonality and strong approximation properties of Chebyshev polynomials, thereby enhancing the accuracy of the shear deformation model without requiring a shear correction factor. The NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) basis functions in IGA enable the construction of highly continuous displacement fields and provide an accurate representation of the geometry, as well as the displacement and stress responses of laminated composite plates. Numerical results are compared with available reference solutions and existing approaches, demonstrating that the proposed IGA- Chebyshev method provides high accuracy, good convergence and an effective capability for predicting the static response of laminated composite plates.

Keywords: Chebyshev polynomial; IGA; NURBS basis functions; HSDT; bending behavior analysis; laminated composite.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trải qua nhiều đột phá trong khoa học và công nghệ vật liệu, vật liệu composite ngày càng được ứng dụng rộng rãi nhờ tính linh hoạt và khả năng tối ưu các đặc tính cơ học. Trong đó, tấm composite nhiều lớp đang nhận được sự quan tâm và nghiên cứu nhờ khả năng thiết kế và điều chỉnh các đặc tính cơ học thông qua sự sắp xếp, định hướng và cấu hình khác nhau của các lớp vật liệu. Đặc tính này giúp tấm composite nhiều lớp đáp ứng hiệu quả các yêu cầu về độ bền, độ cứng và trọng lượng nhẹ trong nhiều ứng dụng kỹ thuật tiên tiến.

Lý thuyết tấm cổ điển (CLPT) dựa trên giả thuyết Kirchhoff, bỏ qua biến dạng cắt nên phù hợp với tấm mỏng nhưng kém chính xác khi chiều dày tăng. Vì vậy, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) của Mindlin được phát triển để xét biến dạng cắt ngang nhưng cần hệ số hiệu chỉnh cắt [1]. Các lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) tiếp tục được phát triển nhằm loại bỏ hệ số này, đồng thời mô tả chính xác sự phân bố biến dạng cắt theo chiều dày và thỏa mãn điều kiện ứng suất cắt bằng không tại hai bề mặt trên cùng và dưới cùng của tấm [2]. Song song đó, phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) sử dụng lưới phần tử và các hàm nội suy, trong khi phương pháp phân

tích đẳng hình học (IGA) sử dụng điểm điều khiển và các hàm cơ sở NURBS [3]. Khác với FEM truyền thống, IGA [3] trực tiếp sử dụng các hàm cơ sở NURBS vốn được dùng để biểu diễn hình học CAD cho cả quá trình mô hình hóa hình học và xấp xỉ trường vật lý, qua đó đảm bảo tính nhất quán giữa mô hình hình học và mô hình phân tích. Đặc biệt, NURBS có khả năng duy trì tính liên tục cao giữa các miền tham số, cho phép xây dựng trường chuyển vị trơn với các đạo hàm bậc cao, đồng thời giảm đáng kể sai số hình học trong quá trình phân tích. Nhờ những ưu điểm này, IGA ngày càng được ứng dụng hiệu quả trong phân tích kết cấu tấm và vỏ, đặc biệt đối với các lý thuyết biến dạng bậc cao yêu cầu tính liên tục cao của trường chuyển vị.

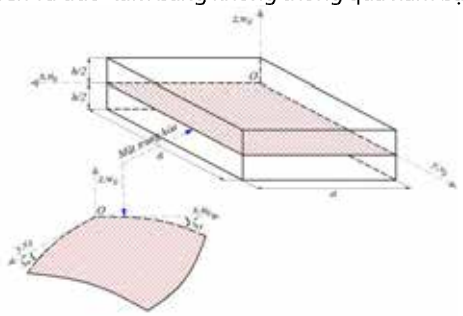
Trong nghiên cứu này, hàm Chebyshev được đề xuất dựa trên hệ đa thức thiết lập từ hàm cosin, với ưu điểm về tính trực giao, khả năng xấp xỉ tốt và hội tụ nhanh kết hợp với phương pháp phân tích đẳng hình học góp phần nâng cao độ chính xác và hiệu quả tính toán [4]. Các kết quả số được so sánh với các hàm bậc cao khác và nghiệm chính xác 3D, qua đó cho thấy phương pháp đề xuất IGA-Chebyshev là một công cụ phân tích hiệu quả cho các lớp bài toán tấm vỏ [5].

2. LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẬC CAO DỰA TRÊN ĐA THỨC CHEBYSHEV BẬC BA

Trường chuyển vị tại một điểm bất kì lần lượt theo hệ trục tọa độ *x, y, z* cho một tấm composite nhiều lớp được mô tả như sau [2]:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u_0(x,y) - zw_{,x} + n(z)\zeta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v_0(x,y) - zw_{,y} + n(z)\zeta_y(x,y); \quad \left(\frac{-h}{2} \le z \le \frac{h}{2}\right) \\ w(x,y,z) &= w_0(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

Trong đó, u_0, v_0, w_0 và $\zeta = (\zeta_x;\zeta_y)^T$ lần lượt biểu diễn các thành phần chuyển vị theo các phương *x, y, z* và các góc quay trong các mặt phẳng *x-z* và *y-z* tương ứng như Hình 1. Ứng suất cắt được biểu diễn một cách liên tục theo chiều dày tấm và thỏa mãn được điều kiện biên trên và dưới tấm bằng không thông qua hàm bậc cao *n(z)*.

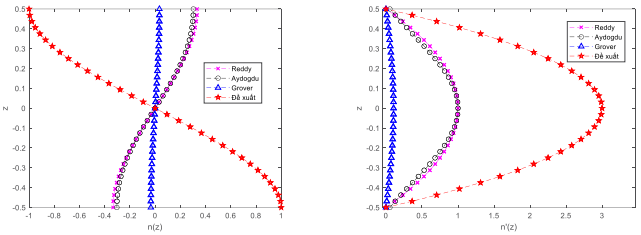


Hình 1. Hình học tấm và trường chuyển vị theo hệ trục tọa độ *x, y, z*

Các hàm bậc cao tham khảo và hàm Chebyshev bậc ba đề xuất được áp dụng cho bài toán phân tích ứng xử uốn cho tấm composite nhiều lớp được trình bày trong Bảng 1. Hình 2 cho thấy được sự mô tả một số hàm tham khảo và đạo hàm của chúng theo bề dày tấm.

Bảng 1. Hàm biến dạng cắt bậc cao và đạo hàm tương ứng

Tác giả	*n(z)*	*n'(z)*
Reddy [2]	$z - 4z^3/3h^2$	$1 - 4(z/h)^2$
Aydogdu [6]	$3^{-2(z/h)^2/\ln(3)}z$	$e^{-2z^2/h^2}\left(1 - 4z^2/h^2\right)$
Grover [7]	$h\sinh^{-1}(z/h) - 2z/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{1+(z/h)^2} - 2/\sqrt{5}$
Đề xuất (Chebyshev)	$\cos\left(3\cos^{-1}(z/h)\right)$	$3\left(4z^2/h^2 - 1\right)/h$



(a) (b)

Hình 2. Một số hàm bậc cao (a) và đạo hàm tương ứng (b)

Mối quan hệ giữa các biến dạng Cauchy với các trường chuyển vị như sau [2]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_p &= \{\varepsilon_{xx} \;\; \varepsilon_{yy} \;\; \gamma_{xy}\}^T = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\varepsilon}_1 + n(z)\boldsymbol{\varepsilon}_2; \\ \boldsymbol{\gamma} &= \{\gamma_{xz} \;\; \gamma_{yz}\}^T = n'(z)\boldsymbol{\varepsilon}_s \end{aligned} \tag{2}$$

Trong đó:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ v_{0,x} + u_{0,y} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -w_{,xy} \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{Bmatrix} \zeta_{x,x} \\ \zeta_{y,y} \\ \zeta_{y,x} + \zeta_{x,y} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{Bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Với mỗi lớp thứ *t* vật liệu được xem là trực hướng, các thành phần ứng suất cho từng lớp theo hệ trục tọa độ cục bộ được xác định như sau [8]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^t \\ \sigma_2^t \\ \tau_{12}^t \\ \tau_{13}^t \\ \tau_{23}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^t \\ \varepsilon_2^t \\ \gamma_{12}^t \\ \gamma_{13}^t \\ \gamma_{23}^t \end{Bmatrix} \tag{4}$$

Trong đó, các thành phần ma trận độ cứng suy giảm cho từng lớp thứ *t* được xác định như sau:

$$\begin{aligned} &Q_{11}^t = \frac{E_1^t}{1 - \nu_{12}^t\nu_{21}^t}; Q_{12}^t = \frac{\nu_{12}^t E_2^t}{1 - \nu_{12}^t\nu_{21}^t}; Q_{22}^t = \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^t\nu_{21}^t}; \\ &Q_{33}^t = G_{12}^t; Q_{55}^t = G_{13}^t; Q_{44}^t = G_{23}^t \end{aligned} \tag{5}$$

Đối với lớp thứ *t*, các thành phần đặc trưng vật liệu theo hệ trục vật liệu 1, 2 và 3 được xác định thông qua các hệ số mô-đun Young, mô-đun cắt và hệ số Poisson.

Từ các thành phần ứng suất của hệ trục cục bộ, các thành phần ứng suất theo hệ trục toàn cục được thiết lập theo các ma trận cosin chỉ hướng như sau [9]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^t \\ \sigma_2^t \\ \tau_{12}^t \\ \tau_{13}^t \\ \tau_{23}^t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{54} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^t \\ \varepsilon_2^t \\ \gamma_{12}^t \\ \gamma_{13}^t \\ \gamma_{23}^t \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Trong đó, ma trận độ cứng suy giảm $\bar{\mathbf{Q}}_{ij}$ từ hệ trục cục bộ của tấm được đưa về hệ trục toàn cục.

Đồng thời, theo định luật Hooke xây dựng được mối quan hệ giữa các thành phần ứng suất và biến dạng thông qua các thành phần ma trận độ cứng hệ tọa độ toàn cục như sau:

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}_p\\ \boldsymbol{\tau}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}^* & 0\\ 0 & \mathbf{D}^s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_p\\ \boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix} \quad (7)$$

Trong đó, $\mathbf{D}^*$ được định nghĩa là ma trận độ cứng đàn hồi được xác định như sau:

$$\mathbf{D}^*=\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E}\\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F}\\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H}\end{bmatrix} \quad (8)$$

Theo phương trình (8), các thành phần độ cứng được thiết lập thông qua các thành phần độ cứng suy giảm hệ trục toàn cục như sau [10]:

$$A_{ij},B_{ij},D_{ij},E_{ij},F_{ij},H_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}(1,z,z^2,n(z),zn(z),n^2(z))\bar{Q}_{ij}\mathrm{d}z \quad i,j=1,2,6$$
$$D_{ij}^s=\int_{-h/2}^{h/2}\left[(n'(z))^2\right]\bar{Q}_{ij}\mathrm{d}z \quad i,j=4,5 \quad (9)$$

Dạng yếu Galerkin được thiết lập như sau [11]:

$$\int_\Omega \delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^T\mathbf{D}^*\boldsymbol{\varepsilon}_p\mathrm{d}\Omega+\int_\Omega\delta\boldsymbol{\gamma}^T\mathbf{D}^s\boldsymbol{\gamma}\mathrm{d}\Omega=\int_\Omega\delta w q_0\mathrm{d}\Omega \quad (10)$$

3. XẤP XỈ DỰA TRÊN HÀM CƠ SỞ NURBS

Trường chuyển vị tại một điểm bất kì được xấp xỉ như sau [12]:

$$\mathbf{x}^h(\xi,\eta)=\sum_{U=1}^{m\times n}T_U(\xi,\eta)\mathbf{P}_U;\quad \mathbf{u}^h(\xi,\eta)=\sum_{U=1}^{m\times n}T_U(\xi,\eta)\mathbf{q}_U \quad (11)$$

Với $n\times m$ là tổng số hàm cơ sở và $\mathbf{x}^T=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ là véc-tơ tọa độ vật lý. Trong đó, hàm cơ sở NURBS và véc-tơ bậc tự do tại điểm điều khiển U lần lượt là $T_U(\xi,\eta)$ và $\mathbf{q}_U=\begin{bmatrix}u_{0U} & v_{0U} & w_{0U} & \zeta_{xU} & \zeta_{yU}\end{bmatrix}^T$.

Từ phương trình (11) thay vào phương trình (2), các trường biến dạng được xác định như sau [12]:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_p & \boldsymbol{\gamma}\end{bmatrix}^T=\sum_{U=1}^{m\times n}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_U^m & \mathbf{B}_U^{b1} & \mathbf{B}_U^{b2} & \mathbf{B}_U^s\end{bmatrix}^T\mathbf{q}_U \quad (12)$$

Trong đó:

$$\mathbf{B}_U^m=\begin{bmatrix}T_{U,x} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & T_{U,y} & 0 & 0 & 0\\ T_{U,y} & T_{U,x} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix};\mathbf{B}_U^{b1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -T_{U,xx} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -T_{U,yy} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2T_{U,xy} & 0 & 0\end{bmatrix};$$
$$\mathbf{B}_U^{b2}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & T_{U,x} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{U,y}\\ 0 & 0 & 0 & T_{U,y} & T_{U,x}\end{bmatrix};\mathbf{B}_U^s=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & T_U & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_U\end{bmatrix}. \quad (13)$$

Công thức phân tích tĩnh thu được từ việc thay phương trình (12), quan hệ giữa các biến dạng với các véc-tơ bậc tự do và ma trận độ cứng **B** vào phương trình (10) ta thu được như sau [12]:

$$\mathbf{Kq}=\mathbf{f} \quad (14)$$

Tại đây, ma trận độ cứng toàn phần **K** được thiết lập như sau:

$$\mathbf{K}=\int_\Omega\left[\begin{Bmatrix}\mathbf{B}^m\\ \mathbf{B}^{b1}\\ \mathbf{B}^{b2}\end{Bmatrix}^T\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E}\\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F}\\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{B}^m\\ \mathbf{B}^{b1}\\ \mathbf{B}^{b2}\end{Bmatrix}+(\mathbf{B}^s)^T\mathbf{D}^s\mathbf{B}^s\right]\mathrm{d}\Omega \quad (15)$$

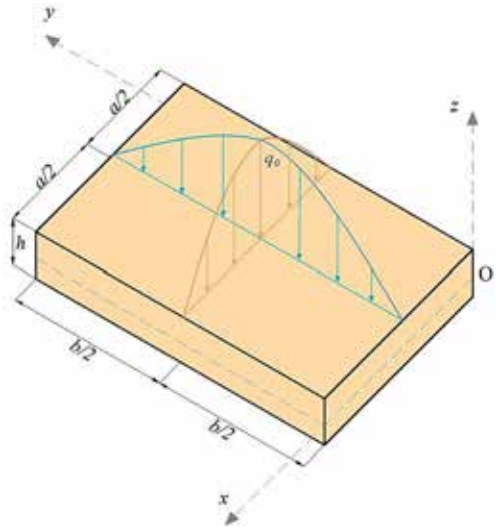
Trong đó, ma trận véc-tơ lực **f** được xác định như sau: $\mathbf{f}=\int_\Omega q_0\mathbf{R}_0\mathrm{d}\Omega$, trong đó: $\mathbf{R}_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & T_U & 0 & 0\end{bmatrix}$

4. KẾT QUẢ SỐ

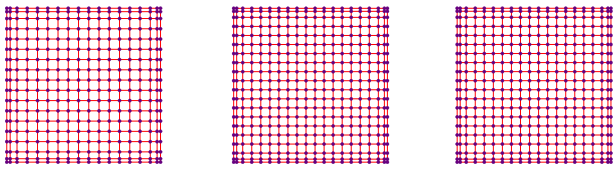
Trước tiên, nhằm kiểm chứng tính hội tụ và xác định cấu hình tính toán tối ưu cho mô hình đề xuất, ảnh hưởng của bậc hàm cơ sở và mật độ lưới được khảo sát một cách có hệ thống. Một tấm vuông bốn lớp $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ với các cạnh được tựa đơn hoàn toàn (SSSS), chịu tải phân bố dạng hình sin, được lựa chọn làm mô hình kiểm chứng. Ba mức mật độ lưới, gồm 15 × 15, 17 × 17 và 19 × 19 nút, được lần lượt xem xét đối với các hàm cơ sở bậc 3 và bậc 4. Kết quả thu được được trình bày trong Bảng 2. Có thể thấy rằng, đối với hàm cơ sở bậc 3, nghiệm thu được với lưới 17 × 17 đã đạt trạng thái gần hội tụ; trong khi đó, hàm cơ sở bậc 4 cần đến lưới 19 × 19 mới cho kết quả tương tự. Sự thay đổi của kết quả khi tiếp tục tinh mịn lưới là không đáng kể, cho thấy độ chính xác của nghiệm đã được đảm bảo. Mặc dù hàm cơ sở bậc 4 có khả năng cải thiện độ chính xác xấp xỉ, việc sử dụng hàm bậc cao đồng thời làm gia tăng số lượng bậc tự do và chi phí tính toán, trong khi mức độ cải thiện về kết quả là không đáng kể. Do đó, lưới 17 × 17 kết hợp với hàm cơ sở bậc 3 được lựa chọn cho các phân tích tiếp theo, nhằm đạt được sự cân bằng hợp lý giữa độ chính xác, khả năng hội tụ và hiệu quả tính toán.

Các thành phần ứng ứng suất và chuyển vị không thứ nguyên được tính như sau:

$$\bar{w}=(100E_2h^3)w(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0)/q_0a^4;\ \bar{\sigma}_{xx}=\frac{h^2}{q_0a^2}\sigma_{xx}(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2});$$
$$\bar{\sigma}_{yy}=\frac{h^2}{q_0a^2}\sigma_{yy}(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{4})$$
$$\bar{\sigma}_{xy}=\frac{h^2}{q_0a^2}\sigma_{xy}(0,0,\frac{h}{2});\ \bar{\sigma}_{xz}=\frac{h}{q_0a}\sigma_{xz}(0,\frac{a}{2},0); \quad (16)$$
$$\bar{\sigma}_{yz}=\frac{h}{q_0a}\sigma_{yz}(\frac{a}{2},0,0)$$



Hình 3. Mô hình tấm composite nhiều lớp chịu tải phân bố hình sin.



(a) (b) (c)

Hình 4. Lưới điều khiển tấm composite nhiều lớp (a) 15×15, (b) 17×17 và (c) 19×19

Bảng 2. Khảo sát hội tụ nghiệm theo bậc hàm cơ sở và mật độ lưới điều khiển của tấm vuông bốn lớp $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ chịu tải phân bố dạng hình sin (a/h = 4)

Kết quả	Cấu hình lưới - bậc									Nghiệm chính xác 3D [5]
	p = 2			p = 3			p = 4			
	15 x 15	17 x 17	19 x 19	15 x 15	17 x 17	19 x 19	15 x 15	17 x 17	19 x 19	
$\bar{w}$	1,8633 (4,64%)	1,8693 (4,33%)	1,8739 (4,09%)	1,8936 (3,09%)	1,8936 (3,09%)	1,8936 (3,09%)	1,8936 (3,09%)	1,8936 (3,09%)	1,8936 (3,09%)	**1,9540**
$\bar{\sigma}_{xx}$	0,6498 (9,75%)	0,6540 (9,16%)	0,6570 (8,75%)	0,6607 (8,23%)	0,6617 (8,09%)	0,6624 (8,00%)	0,6651 (7,62%)	0,6651 (7,62%)	0,6651 (7,62%)	**0,7200**
$\bar{\sigma}_{yy}$	0,6258 (5,61%)	0,6269 (5,44%)	0,6278 (5,30%)	0,6300 (4,97%)	0,6305 (4,90%)	0,6308 (4,85%)	0,6322 (4,64%)	0,6322 (4,64%)	0,6322 (4,64%)	**0,6630**
$\bar{\sigma}_{xz}$	0,2266 (3,47%)	0,2241 (2,32%)	0,2221 (1,41%)	0,2064 (5,75%)	0,2063 (5,79%)	0,2063 (5,79%)	0,2063 (5,79%)	0,2063 (5,79%)	0,2063 (5,79%)	**0,2190**
$\bar{\sigma}_{yz}$	0,2580 (11,64%)	0,2559 (12,36%)	0,2543 (12,91%)	0,2389 (18,18%)	0,2389 (18,18%)	0,2389 (18,18%)	0,2389 (18,18%)	0,2389 (18,18%)	0,2389 (18,18%)	**0,2920**
$\bar{\sigma}_{xy}$	0,0474 (1,49%)	0,0469 (0,42%)	0,0465 (0,42%)	0,0440 (5,78%)	0,0440 (5,78%)	0,0440 (5,78%)	0,0440 (5,78%)	0,0440 (5,78%)	0,0440 (5,78%)	**0,0467**

Tiếp theo, chúng tôi khảo sát tấm chữ nhật 3 lớp $[0^0/90^0/0^0]$ (a/b=3) chịu tải hình sin qua các tỷ số a/h từ 4 đến 100 cùng với điều kiện biên SSSS. Các thành phần ứng suất và chuyển vị không thứ nguyên được xác định như sau:

$$\bar{w} = (100E_2h^3)w(\frac{a}{2},\frac{b}{2},0)/q_0a^4;\ \bar{\sigma}_{xx} = \frac{h^2}{q_0a^2}\sigma_{xx}(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{2});$$

$$\bar{\sigma}_{yy} = \frac{h^2}{q_0a^2}\sigma_{yy}(\frac{a}{2},\frac{b}{2},\frac{h}{6})$$

$$\bar{\sigma}_{xy} = \frac{h^2}{q_0a^2}\sigma_{xy}(0,0,\frac{h}{2});\ \bar{\sigma}_{xz} = \frac{h}{q_0a}\sigma_{xz}(0,\frac{b}{2},0); \quad (17)$$

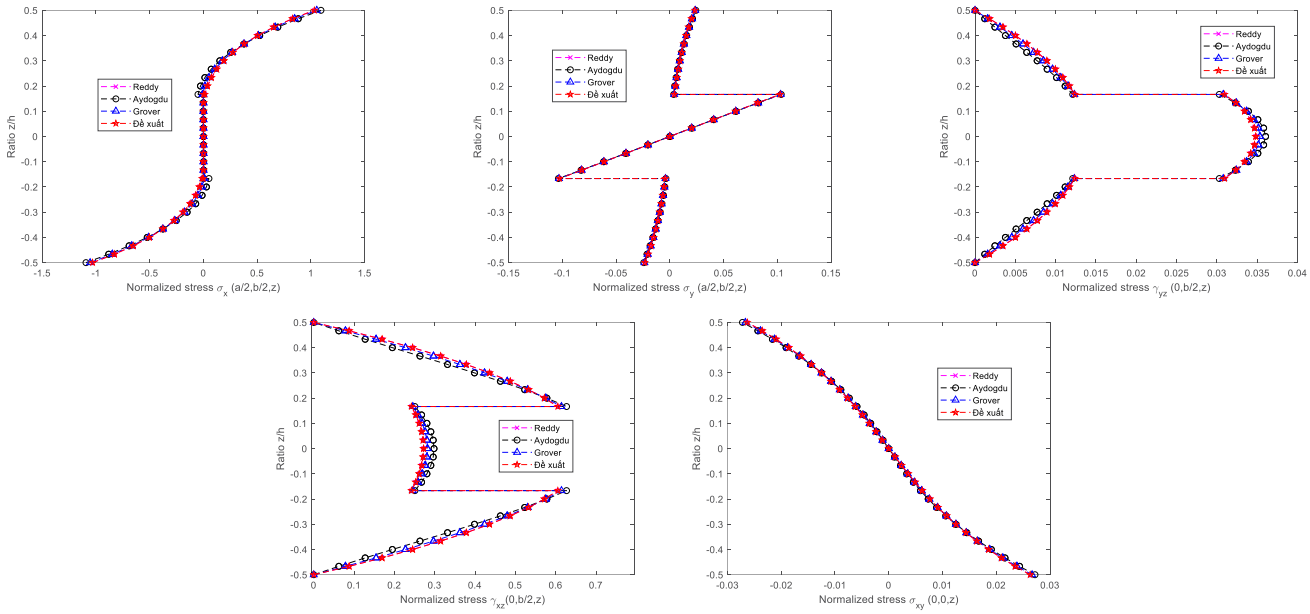
$$\bar{\sigma}_{yz} = \frac{h}{q_0a}\sigma_{yz}(\frac{a}{2},0,0)$$

Bảng 3. Chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của tấm chữ nhật 3 lớp $[0^0/90^0/0^0]$ chịu tải phân bố hình sin

a/h	Tác giả	$\bar{w}$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\sigma}_{xz}$	$\bar{\sigma}_{yz}$	$\bar{\sigma}_{xy}$
4	IGA - Reddy [2]	2,6410	1,0311	0,1025	0,2723	0,0348	0,0263
	IGA - Aydogdu [6]	2,6837	1,0926	0,1036	0,2982	0,0360	0,0272
	IGA - Grover [7]	2,6606	1,0541	0,1031	0,2821	0,0353	0,0266
	IGA - Chebyshev	2,6410	1,0311	0,1025	0,2723	0,0348	0,0263
	Nghiệm chính xác 3D [5]	**2,8200**	**1,1000**	**0,1190**	**0,3870**	**0,0334**	**0,0281**
10	IGA - Reddy [2]	0,8621	0,6908	0,0397	0,2859	0,0169	0,0115
	IGA - Aydogdu [6]	0,8767	0,7027	0,0402	0,3194	0,0174	0,0117
	IGA - Grover [7]	0,8679	0,6951	0,0399	0,2981	0,0171	0,0115
	IGA - Chebyshev	0,8621	0,6908	0,0397	0,2859	0,0169	0,0115
	Nghiệm chính xác 3D [5]	**0,9190**	**0,7250**	**0,0435**	**0,4200**	**0,0152**	**0,0123**
20	IGA - Reddy [2]	0,5937	0,6396	0,0288	0,2880	0,0139	0,0091
	IGA - Aydogdu [6]	0,5976	0,6426	0,0290	0,3227	0,0142	0,0091
	IGA - Grover [7]	0,5952	0,6407	0,0289	0,3006	0,0140	0,0091
	IGA - Chebyshev	0,5937	0,6396	0,0288	0,2880	0,0139	0,0091
	Nghiệm chính xác 3D [5]	**0,6100**	**0,6500**	**0,0299**	**0,4340**	**0,0119**	**0,0093**
100	IGA - Reddy [2]	0,5070	0,6230	0,0252	0,2887	0,0129	0,0083
	IGA - Aydogdu [6]	0,5071	0,6231	0,0252	0,3238	0,0132	0,0083
	IGA - Grover [7]	0,5070	0,6231	0,0252	0,3014	0,0130	0,0083
	IGA - Chebyshev	0,5070	0,6230	0,0252	0,2887	0,0129	0,0083
	Nghiệm chính xác 3D [5]	**0,5080**	**0,6240**	**0,0253**	**0,4390**	**0,0108**	**0,0083**

Bảng 3 trình bày các giá trị chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên theo chiều dày của tấm chữ nhật ba lớp với các tỷ số a/h khác nhau. Có thể nhận thấy rằng, đối với các tấm tương đối dày với a/h = 4-10, kết quả thu được từ các hàm cơ sở nhìn chung gần tiến đến nghiệm chính xác của Pagano [5], đặc biệt gần như trùng khớp với hàm đa thức bậc 3 của Reddy [2]. Khi tỷ số a/h tăng lên, đặc biệt tại a/h = 100, các kết quả đạt được hoàn toàn trùng khớp với nhau và sát với nghiệm tham khảo. Xu hướng này có thể được giải thích bởi khi a/h tăng, chiều dày tấm trở nên rất nhỏ so với kích thước, do đó ảnh hưởng của biến dạng cắt ngang và các hiệu ứng bậc cao

giảm đáng kể. Khi đó, hình học của tấm tiến gần đến giả thiết tấm mỏng, và các mô hình lý thuyết bậc cao có xu hướng hội tụ về cùng một nghiệm. Đặc biệt, sự tương đồng tốt giữa các hàm bậc cao được khảo sát cho thấy tính nhất quán và độ tin cậy của hàm cơ sở đề xuất. Những kết quả này khẳng định khả năng của phương pháp đề xuất trong việc mô phỏng chính xác ứng xử cơ học của tấm composite nhiều lớp trên một phạm vi rộng của tỷ số *a/h*, đồng thời cho thấy tiềm năng ứng dụng hiệu quả trong các bài toán phân tích kết cấu composite nhiều lớp.



Hình 5. Sự phân bố ứng suất của các hàm bậc cao theo chiều dày tấm chữ nhật 3 lớp $[0^0 / 90^0 / 0^0]$ chịu tải phân bố hình sin.

5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu này đề xuất hàm biến dạng cắt bậc ba dựa trên đa thức Chebyshev kết hợp với phương pháp phân tích đẳng hình học (IGA-Chebyshev) để phân tích ứng xử tĩnh của tấm composite nhiều lớp. Hàm Chebyshev cho phép mô tả linh hoạt biến dạng cắt theo chiều dày mà không cần sử dụng hệ số hiệu chỉnh cắt. Các kết quả số cho thấy mô hình đề xuất có khả năng hội tụ tốt và phù hợp với các nghiệm tham khảo cũng như nghiệm chính xác 3D, qua đó khẳng định độ tin cậy và hiệu quả của phương pháp. Trong tương lai, mô hình có thể được mở rộng cho các bài toán dao động tự do, ổn định, động lực học và phi tuyến của kết cấu composite có hình học và vật liệu phức tạp.

Lời cảm ơn: Công trình nghiên cứu thuộc đề tài có mã số SV2026 - 355 được tài trợ bởi Trường Đại học Công nghệ Kỹ thuật TP.HCM (HCM-UTE).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R. D. Mindlin. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 18, no. 1, pp. 31-38, 1951.

[2] J. N. Reddy. A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics, vol. 51, no. 4, pp. 745-752, 1984.

[3] J. A. Cottrell, Y. Bazilevs, T. J. R. Hughes. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, no. 39-41, pp. 4135-4195, 2005.

[4] Chien H. Thai, P. Phung-Van, Lieu B. Nguyen. Chebyshev polynomials in moving Kriging meshfree method for laminated composite plates. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 245, 2025.

[5] N. J. Pagano. Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates. Journal of Composite Materials, vol. 4, no. 1, pp. 20-34, 1970.

[6] M. Aydoğdu. A new shear deformation theory for laminated composite plates. Composite Structures, vol. 89, no. 1, pp. 94-101, 2009.

[7] B. N. Singh, D. K. Maiti, Neeraj Grover. A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates. Composite Structures (Elsevier), vol. 95, pp. 667-675, 2013.

[8] K. Swaminathan, T. Kant. Analytical solutions for static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. Composite Structures, vol. 56, no. 4, pp. 329-344, 2002.

[9] A. S. Oktem, C. G. Soares, J. L. Mantari. A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. Composite Structures, vol. 94, no. 2, pp. 714-723, 2012.

[10] S. E. Kim, H. T. Thai. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. Composite Structures, vol. 128, pp. 20-36, 2015.

[11] Loc V. Tran, Chien H. Thai, Thoi Nguyen-Thoi, Hung Nguyen-Xuan. Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation theory and isogeometric approach. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 99, no. 11, pp. 812-839, 2014.

[12] Chien H. Thai, A. J. M. Ferreira, S. P. A. Bordas, T. Rabczuk, Hung Nguyen-Xuan. Isogeometric analysis of laminated composite plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory. European Journal of Mechanics - A/Solids, vol. 43, pp. 43-57, 2014.