

XÂY DỰNG

TẠP CHÍ ĐIỆN TỬ CỦA BỘ XÂY DỰNG
JOURNAL OF CONSTRUCTION

TẠP CHÍ XÂY DỰNG - eISSN 3030-4482

Nghiên cứu ứng dụng mạng nơ-ron tích hợp thông tin vật lý trong bài toán dẫn nhiệt của vật liệu

A study on the application of Physics-Informed Neural Networks to heat conduction problems in materials

➤ **TS Nguyễn Thị Hương Giang**

Trường Đại học Giao thông vận tải

Email: nguyenthihuonggiang@utc.edu.vn

THÔNG TIN BÀI BÁO

Chuyên mục: Khoa học công nghệ

Ngày nhận bài: 11/3/2026

Ngày sửa bài: 20/3/2026

Ngày chấp nhận đăng: 01/4/2026

Ngày xuất bản Online: 22/4/2026

Tác giả liên hệ: Email: nguyenthihuonggiang@utc.edu.vn

TÓM TẮT

Bài báo trình bày nghiên cứu về mạng nơ-ron tích hợp thông tin vật lý (Physics-Informed Neural Networks - PINNs) và khả năng ứng dụng của phương pháp này trong bài toán dẫn nhiệt của vật liệu đồng nhất trong không gian hai chiều. Mô hình PINNs được xây dựng nhằm xác định trường nhiệt độ và trường dòng nhiệt trong miền khảo sát dựa trên các phương trình chi phối của quá trình dẫn nhiệt. Kết quả thu được từ phương pháp PINNs được so sánh với kết quả tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method - FEM) nhằm đánh giá độ chính xác và độ tin cậy của mô hình. Kết quả nghiên cứu cho thấy phương pháp PINNs có khả năng tái hiện tốt phân bố nhiệt độ và dòng nhiệt, đồng thời cho kết quả phù hợp với phương pháp FEM.

Từ khóa: Mạng nơ-ron tích hợp thông tin vật lý; dẫn nhiệt; trường nhiệt độ; trường dòng nhiệt; phương pháp số.

ABSTRACT

This paper presents a study on Physics-Informed Neural Networks (PINNs) and their application to heat conduction problems in homogeneous materials in a two-dimensional domain. The PINNs model is developed to determine the temperature field and heat flux distribution in the computational domain based on the governing equations of heat conduction. The results obtained from the PINNs approach are compared with those computed using the Finite Element Method (FEM) in order to evaluate the accuracy and reliability of the model. The results demonstrate that the PINNs method can effectively

reproduce the temperature distribution and heat flux, showing good agreement with the FEM results.

Keywords: Physics-Informed Neural Networks; conduction; temperature field; flux field; finite element method.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Dẫn nhiệt là một trong những cơ chế truyền nhiệt cơ bản, đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực kỹ thuật như kỹ thuật vật liệu, cơ học nhiệt, năng lượng và thiết kế các kết cấu chịu nhiệt. Việc xác định chính xác phân bố nhiệt độ và dòng nhiệt trong vật liệu là cơ sở quan trọng để đánh giá hiệu suất làm việc, độ bền nhiệt cũng như độ tin cậy của các hệ vật liệu trong những điều kiện vận hành khác nhau.

Trong các bài toán dẫn nhiệt cổ điển, phương trình Fourier thường được sử dụng để mô tả quá trình dẫn nhiệt trong vật liệu rắn. Đối với các vật liệu đồng nhất và hình học đơn giản, bài toán dẫn nhiệt có thể được giải bằng các phương pháp giải tích, cho phép thu được nghiệm chính xác và đóng vai trò quan trọng trong việc kiểm chứng các mô hình số. Tuy nhiên, khi hình học của bài toán trở nên phức tạp hoặc khi vật liệu có cấu trúc dị thể, đa pha với sự chênh lệch lớn về hệ số dẫn nhiệt giữa các pha, việc tìm nghiệm giải tích thường không còn khả thi.

Hiện nay, phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method - FEM) là một trong những công cụ số phổ biến nhất để giải các bài toán dẫn nhiệt trong vật liệu, có thể kể đến nhiều nghiên cứu tiêu biểu [1-4]. Mặc dù FEM cho độ chính xác cao, phương pháp này vẫn tồn tại một số hạn chế. Cụ thể, kết quả tính toán phụ thuộc mạnh vào chất lượng lưới, đặc biệt tại các vùng giao diện giữa các pha của vật liệu nhiều pha. Bên cạnh đó, chi phí tính toán có thể tăng đáng kể khi cần sử dụng lưới tinh để mô tả chính xác trường nhiệt độ và dòng nhiệt. Việc xử lý các điều kiện liên tục tại bề mặt phân pha cũng có thể gặp khó khăn đối với các hình học cốt phức tạp hoặc trong các bài toán đa quy mô.

Trong những năm gần đây, mạng nơ-ron tích hợp thông tin vật lý (Physics-Informed Neural Networks - PINNs) đã nổi lên như một hướng tiếp cận mới đầy tiềm năng trong việc giải các phương trình vi phân riêng phần. Khác với các mô hình học máy thuần dữ liệu, PINNs tích hợp trực tiếp các định luật vật lý chi phối, các điều kiện biên và điều kiện giao diện vào hàm mất mát của mạng nơ-ron. Nhờ đó, nghiệm thu được không chỉ phù hợp với dữ liệu (nếu có) mà còn thỏa mãn các ràng buộc vật lý của bài toán [5-8].

Việc ứng dụng PINNs cho bài toán dẫn nhiệt mang lại nhiều lợi thế đáng chú ý. Thứ nhất, PINNs cho phép mô hình hóa trường nhiệt độ và dòng nhiệt mà không phụ thuộc vào lưới tính toán, từ đó giảm đáng kể độ phức tạp trong việc xử lý hình học và giao diện pha. Thứ hai, các điều kiện liên tục về nhiệt độ và dòng nhiệt tại bề mặt phân pha trong vật liệu composite có thể được tích hợp một cách tự nhiên vào hàm mất mát của mô hình, thay vì phải xử lý gián tiếp thông qua kỹ thuật chia lưới tinh như trong FEM. Ngoài ra, PINNs còn thể hiện tiềm năng trong việc mở rộng cho các bài toán dẫn nhiệt phức tạp hơn, chẳng hạn như bài toán không ổn định, vật liệu có tính chất biến thiên theo không gian hoặc các bài toán đa vật lý.

Trong nghiên cứu này, phương pháp PINNs được áp dụng để giải bài toán dẫn nhiệt của vật liệu đồng nhất trong không gian hai chiều. Cụ thể, mô hình PINNs được xây dựng nhằm xác định trường nhiệt độ và trường dòng nhiệt trong miền khảo sát. Kết quả thu được từ phương pháp PINNs được so sánh với kết quả tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) nhằm đánh giá độ chính xác và độ tin cậy của phương pháp đề xuất.

2. LÝ THUYẾT BÀI TOÁN DẪN NHIỆT

Xét bài toán dẫn nhiệt ổn định trong vật liệu đồng nhất trong miền hai chiều Ω . Quá trình dẫn nhiệt trong vật liệu được mô tả bởi phương trình Fourier dưới dạng phương trình vi phân riêng phần:

$$\nabla \cdot (k \nabla T) = 0 \text{ trong } \Omega \quad (1)$$

Trong đó:

$T(x, y)$ là trường nhiệt độ, k là hệ số dẫn nhiệt của vật liệu, được giả thiết là hằng số đối với vật liệu đồng nhất.

Khi hệ số dẫn nhiệt không đổi, phương trình trên có thể viết lại dưới dạng phương trình Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Trường dòng nhiệt trong vật liệu được xác định theo định luật Fourier:

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \quad (3)$$

Trong đó: $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ là véc tơ dòng nhiệt với:

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (4)$$

Để giải quyết bài toán dẫn nhiệt cần thiết lập các điều kiện biên thích hợp trên biên của miền tính toán $\partial\Omega$. Trong nghiên cứu này, điều kiện nhiệt độ được áp đặt trên một phần của biên (điều kiện Dirichlet):

$$T = T_b \text{ trên } \Gamma_T \quad (5)$$

Trong khi điều kiện cách nhiệt được áp đặt trên phần biên còn lại (điều kiện Neumann).

$$-k \nabla T \cdot \mathbf{n} = q_n \text{ trên } \Gamma_q \quad (6)$$

3. MẠNG NƠ-RON TÍCH HỢP THÔNG TIN VẬT LÝ (PINNs)

3.1. Giới thiệu về PINNs

Mạng nơ-ron tích hợp thông tin vật lý PINNs được đề xuất bởi Raissi và cộng sự [5], là một phương pháp học sâu nhằm giải các bài toán vật lý được mô tả bởi các phương trình vi phân riêng phần. Ý tưởng chính của PINNs là tích hợp trực tiếp các định luật vật lý chi phối vào quá trình huấn luyện của mạng nơ-ron thông qua hàm mất mát. Nhờ đó, mạng nơ-ron không chỉ học từ dữ liệu mà còn được ràng buộc bởi các quy luật vật lý của bài toán.

Tổng quát phương trình vi phân có dạng:

$$u_t + \mathbf{N}[u] = 0 \quad (7)$$

Trong đó: u_t là vi phân theo thời gian, $\mathbf{N}[u]$ là toán tử vi phân theo biến không gian với $x \in \Omega$ và $t \in [0, T]$. Phương trình (7) có nghiệm chính xác $u(X, t)$; điều kiện ban đầu $u(X, 0) = I(X)$; điều kiện biên $u(X, t) = B(X, t)$.

Trong phương pháp PINNs, nghiệm của phương trình (7) được xấp xỉ bởi một mạng nơ-ron sâu. Với đầu vào là các biến không gian, thời gian, mạng nơ-ron được sử dụng

để xây dựng một hàm xấp xỉ cho nghiệm của phương trình vi phân là $u_\theta(X, t)$ bao gồm các trọng số và các hệ số (weights và biases).

Một đặc điểm quan trọng của PINNs là các đạo hàm của nghiệm xấp xỉ có thể được tính trực tiếp thông qua kỹ thuật vi phân tự động (automatic differentiation). Nhờ đó, các toán tử vi phân xuất hiện trong phương trình vật lý có thể được áp dụng trực tiếp lên đầu ra của mạng nơ-ron mà không cần sử dụng các phương pháp sai phân số hoặc các lược đồ rời rạc hóa truyền thống.

Để huấn luyện mạng nơ-ron, một hàm mất mát tổng hợp được xây dựng nhằm đảm bảo nghiệm xấp xỉ thỏa mãn các ràng buộc vật lý của bài toán. Hàm mất mát của mô hình PINNs thường bao gồm hai thành phần chính:

- Sai số của phương trình chi phối (PDE residual).
- Sai số của điều kiện ban đầu (IC) và điều kiện biên (BC).

Hàm mất mát tổng quát có dạng:

$$L = \lambda_r L_{PDE} + \lambda_b L_{BC} + \lambda_i L_{IC} \quad (8)$$

Trong đó: L_{PDE}, L_{BC}, L_{IC} là sai số của phương trình chi phối (PDE), sai số của điều kiện biên và sai số của điều kiện ban đầu. Các biểu thức cụ thể được cho như sau:

$$L_{PDE} = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left| \frac{\partial u_\theta}{\partial t}(X_i, t_i) + N[u](X_i, t_i) \right|^2 \quad (9)$$

$$L_{BC} = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} \left| u_\theta(X_i, t_i) - B(X_i, t_i) \right|^2 \quad (10)$$

$$L_{IC} = \frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} \left| u_\theta(X_i, 0) - I(X_i) \right|^2 \quad (11)$$

Còn $\lambda_r, \lambda_b, \lambda_i$ là các trọng số dùng để cân bằng đóng góp của các thành phần trong hàm mất mát.

Trong (8), (9), (10) thì N_r, N_b, N_i : tổng các điểm lấy mẫu collocation, tổng các điểm trên biên và thời điểm ban đầu.

Quá trình huấn luyện được thực hiện bằng cách cực tiểu hóa hàm mất mát L .

3.2. Áp dụng PINNs cho bài toán dẫn nhiệt

Trong nghiên cứu này, phương pháp PINNs được sử dụng để giải bài toán dẫn nhiệt ổn định trong vật liệu đồng nhất hai chiều. Trường nhiệt độ $T(x, y)$ trong miền tính toán Ω được xấp xỉ bởi một mạng nơ-ron, với kết quả đầu ra của mạng nơ-ron là $T_\theta(x, y)$:

$$T(x, y) = T_\theta(x, y) \quad (12)$$

Từ phương trình vi phân (2) trong mục 2, ta suy ra sai số của phương trình chi phối tại các điểm collocation trong miền được xác định:

$$L_{PDE} = \frac{1}{N_r} \sum_{i=1}^{N_r} \left| \frac{\partial^2 T_\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_\theta}{\partial y^2} \right|^2 \quad (13)$$

Đối với các điều kiện biên Dirichlet, sai số được xác định bởi:

$$L_{BC} = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_b} |T_{\theta}(x_i, y_i) - T_b(x_i, y_i)|^2 \tag{14}$$

T_b là giá trị nhiệt độ được áp trên biên.

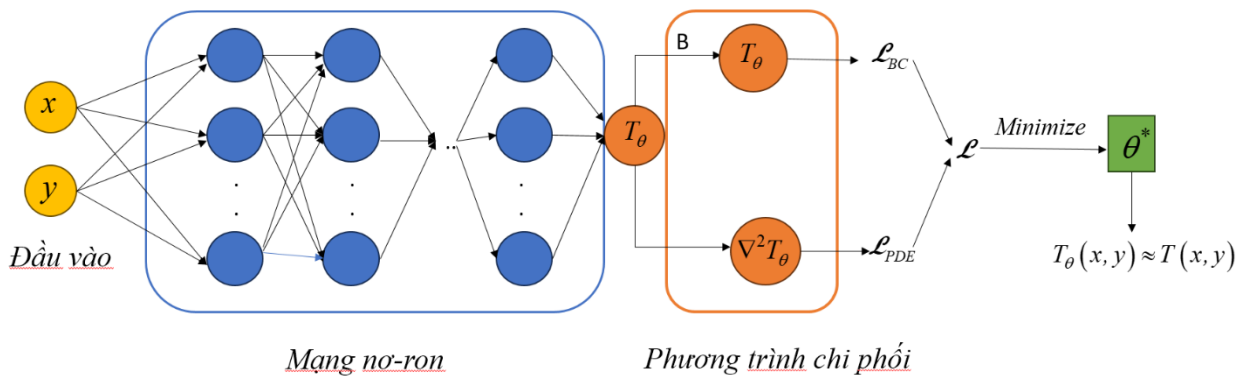
Tổng hàm mất mát của mô hình PINNs được xác định :

$$L = \lambda_r L_{PDE} + \lambda_b L_{BC} \tag{15}$$

Trong quá trình huấn luyện, các điểm collocation được lấy mẫu trong miền tính toán và trên biên của miền. Các tham số của mạng nơ-ron được cập nhật thông qua các thuật toán tối ưu dựa trên gradient nhằm giảm thiểu hàm mất mát.

Sau khi quá trình huấn luyện hội tụ, mạng nơ-ron cung cấp nghiệm xấp xỉ cho trường nhiệt độ trong toàn miền khảo sát. Từ đó, trường dòng nhiệt có thể được xác định theo định luật Fourier ở phương trình (3).

Toàn bộ mô hình PINNs cho bài toán dẫn nhiệt thể hiện dưới Hình 1 sau:



Hình 1. Mô hình PINNs cho bài toán dẫn nhiệt

4. PHƯƠNG PHÁP SỐ

Kết quả thu được từ phương pháp PINNs ở mục 3 được so sánh với nghiệm số nhằm đánh giá độ chính xác và độ tin cậy của phương pháp. Trong nghiên cứu này, nghiệm số được xác định bằng phương pháp phần tử hữu hạn (Finite Element Method - FEM) với sự hỗ trợ của phần mềm mã nguồn mở Cast3M.

Trên mô hình vật liệu, trường nhiệt độ và trường dòng nhiệt được xác định sao cho thỏa mãn các phương trình chi phối và điều kiện biên đã được thiết lập trong các biểu thức (2) - (5).

Quá trình giải bài toán dẫn nhiệt bằng phương pháp FEM trong phần mềm Cast3M được thực hiện thông qua các bước chính sau:

- Xác định các thông số cơ bản của bài toán, bao gồm bài toán dẫn nhiệt ổn định trong vật liệu đẳng hướng;
- Thiết lập lưới phần tử hữu hạn cho miền tính toán;
- Khai báo hệ số dẫn nhiệt của vật liệu và xây dựng ma trận độ cứng của hệ phương trình dẫn nhiệt;
- Áp đặt các điều kiện biên, bao gồm nhiệt độ tại biên trái và biên phải của miền tính toán;
- Giải hệ phương trình thu được để xác định phân bố trường nhiệt độ trong mô hình vật liệu;
- Từ trường nhiệt độ thu được, trường dòng nhiệt được tính toán theo định luật Fourier.

5. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong nghiên cứu này, kiến trúc mạng PINNs để xây dựng trường nhiệt độ, dòng nhiệt cho vật liệu đồng nhất hai chiều với hệ số dẫn $k = 10 (w.m^{-1}.K^{-1})$, biên trái nhiệt độ là 0, biên phải nhiệt độ là 1, thể hiện trên Bảng 1.

Bảng 1. Kiến trúc mạng PINNs

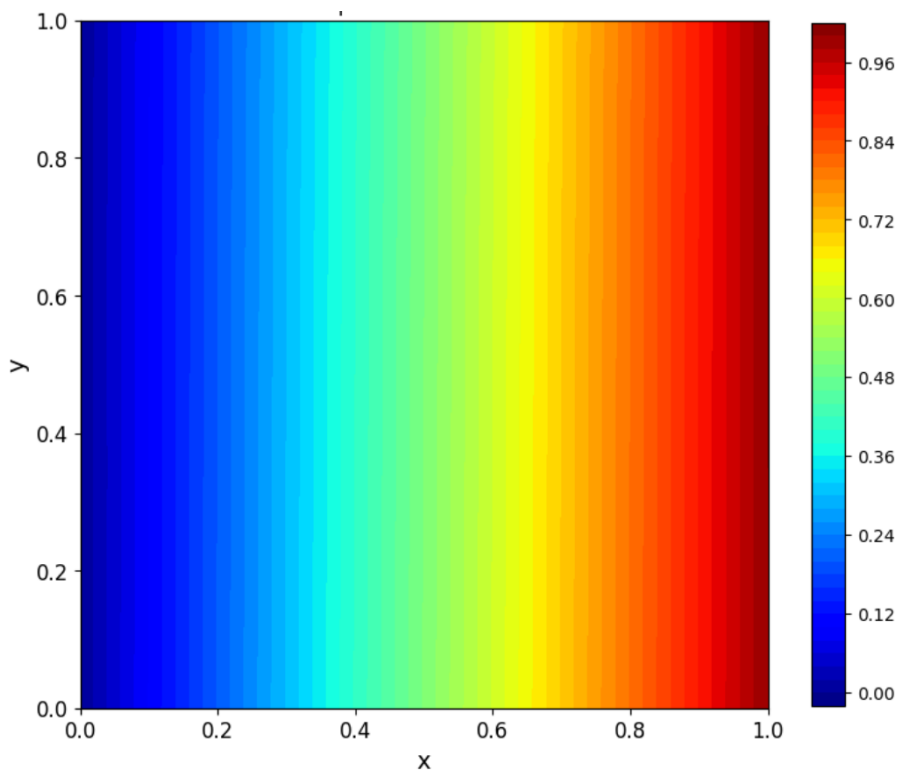
Số lớp ẩn	Số nơ-ron mỗi lớp	Tốc độ học	Bộ tối ưu	Hàm kích hoạt
5	20	10^{-3}	Adam + l-bfgs	Tanh

Mô hình vật liệu hình vuông với cạnh là 1, chia mỗi cạnh thành 51 nút, ta có tổng các điểm trên mẫu là 2.601 điểm, bao gồm các điểm collocation và các điểm trên biên.

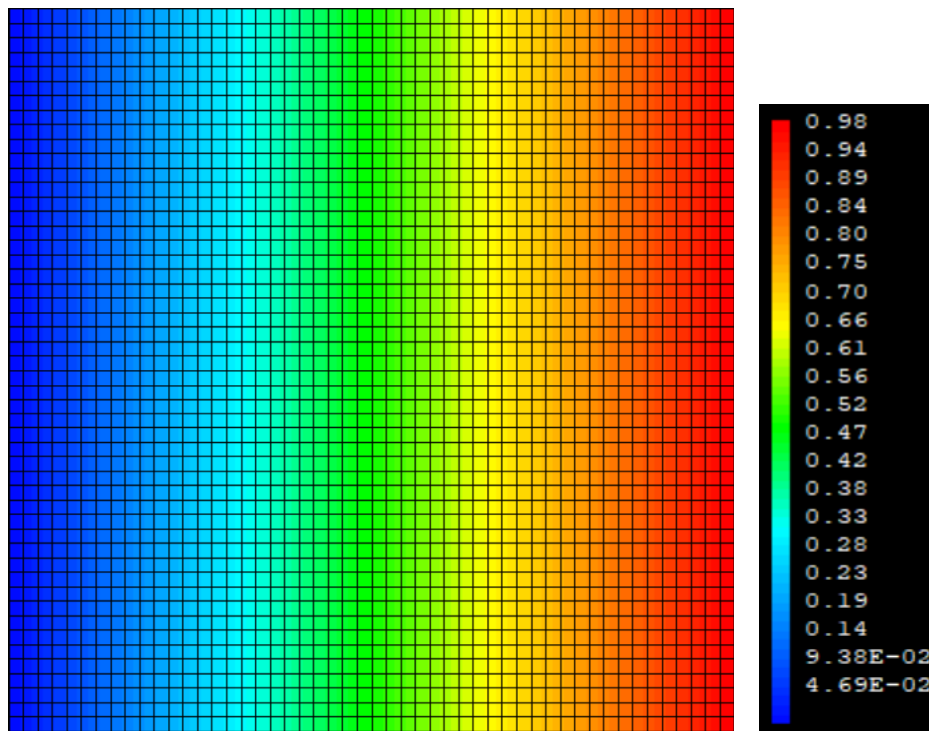
Theo (15), hàm mất mát của mô hình PINNs bao gồm hai thành phần chính: Sai số của phương trình chi phối (PDE residual) và sai số của các điều kiện biên. Trong quá trình huấn luyện, các trọng số λ_r, λ_b được khởi tạo bằng 1.

Trong quá trình tối ưu được thực hiện theo hai giai đoạn. Trước hết, bộ tối ưu Adam được sử dụng trong 1.000 vòng lặp nhằm tìm nghiệm xấp xỉ ban đầu của bài toán. Sau đó, bộ tối ưu L-BFGS được sử dụng để tinh chỉnh và cải thiện độ hội tụ của quá trình huấn luyện với số vòng lặp tối đa 2.000.

Sự kết hợp giữa Adam và L-BFGS cho phép tận dụng ưu điểm của cả hai phương pháp. Adam giúp mạng nhanh chóng tiếp cận vùng nghiệm tiềm năng trong giai đoạn đầu, trong khi L-BFGS đóng vai trò làm mượt nghiệm và tăng độ ổn định của quá trình tối ưu.



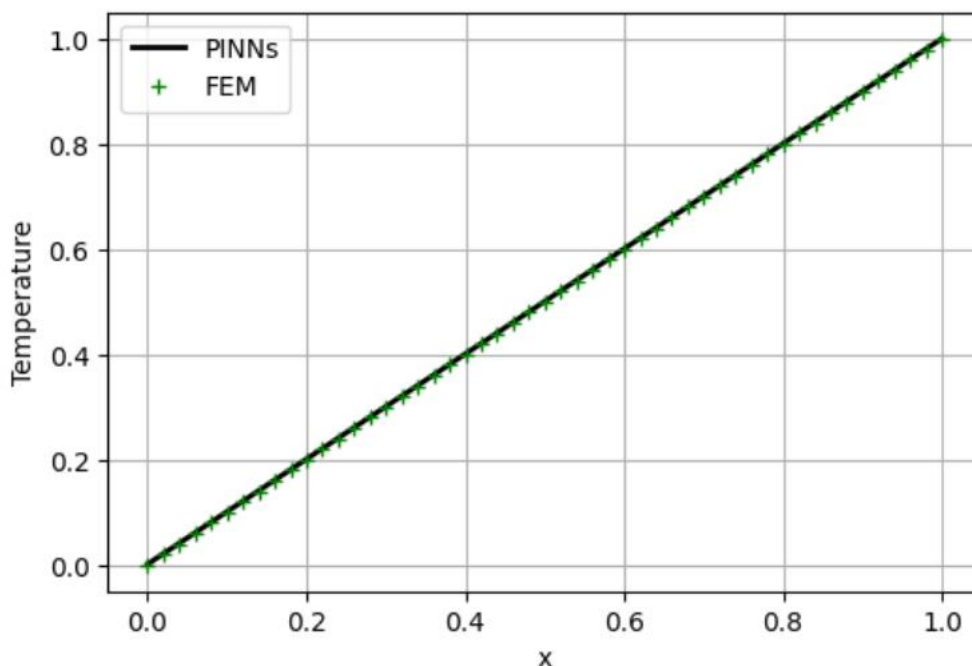
Hình 2. Trường nhiệt độ tính bằng phương pháp PINNs



Hình 3. Trường nhiệt độ tính bằng FEM

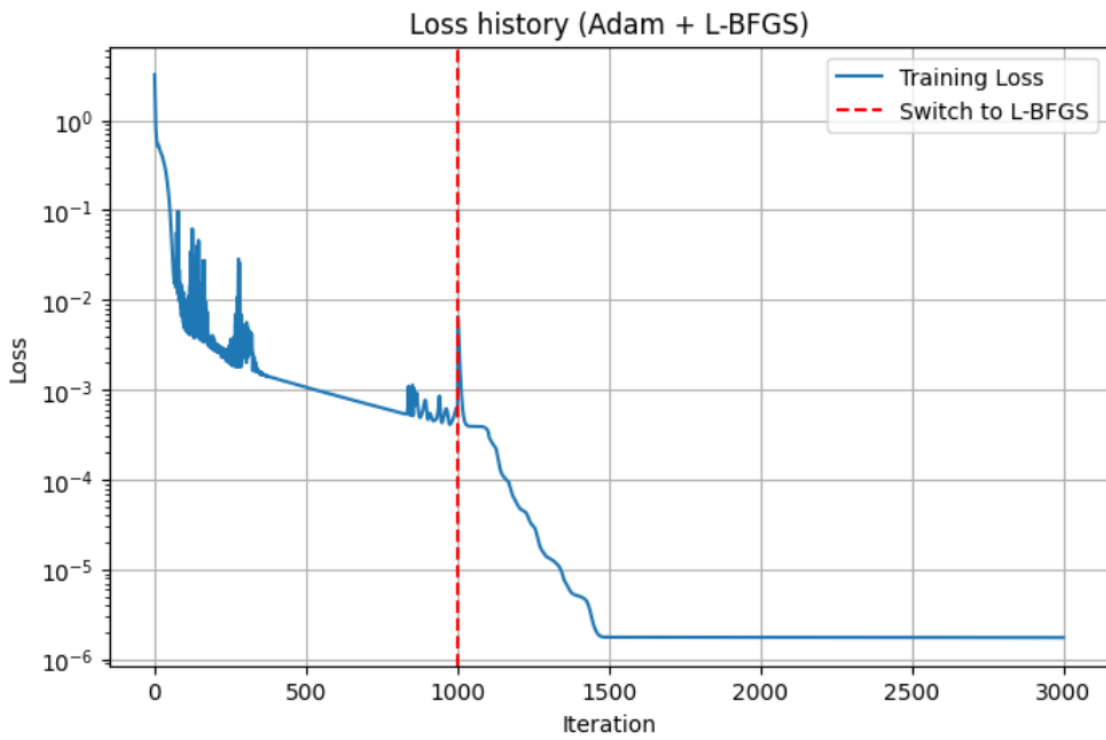
Trực quan khi nhìn vào Hình 2 - 3 có thể thấy rằng sự phân bố nhiệt độ thu được từ hai phương pháp có dạng tương tự nhau. Nhiệt độ tăng dần từ biên trái sang biên phải của miền tính toán, trong khi gần như không có sự biến thiên theo phương y. Điều này phù hợp với đặc điểm của bài toán dẫn nhiệt ổn định trong vật liệu đồng nhất với điều kiện biên nhiệt độ được áp đặt theo phương x.

Để so sánh được cụ thể, có định lượng hơn, trên Hình 4 sẽ thể hiện nhiệt độ của các điểm trên đường chéo của mẫu theo hai phương pháp. Ta thấy kết quả theo hai phương pháp trùng khớp với nhau, thể hiện độ tin cậy cao của PINNs.

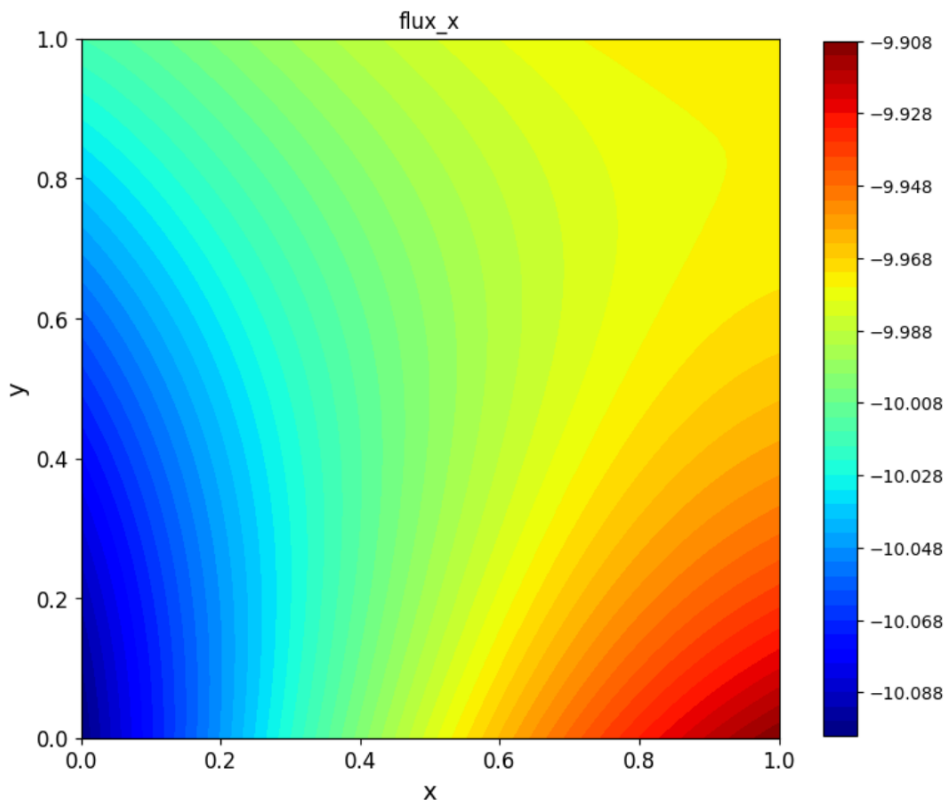


Hình 4. Kết quả so sánh nhiệt độ giữa PINNs và FEM

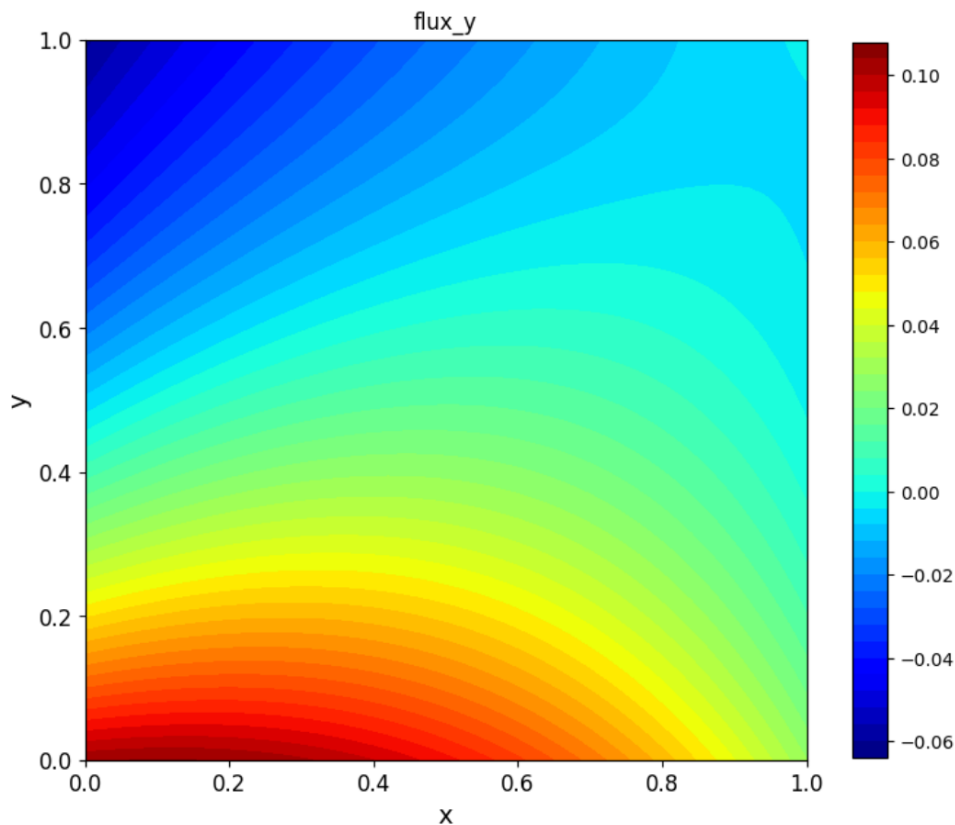
Hình 5 thể hiện sự biến đổi của hàm Loss trong quá trình huấn luyện kết hợp của Adam và L-BFGS. Sau quá trình huấn luyện giá trị của hàm loss hội tụ và đạt 1.758×10^{-6} .



Hình 5. Sự biến đổi của hàm Loss



Hình 6. Trường dòng nhiệt theo phương x (q_x)



Hình 7. Trường dòng nhiệt theo phương y (q_y)

Sau khi xây dựng trường nhiệt độ bằng PINNs, dùng công thức (4) chúng ta cũng có thể tính toán xây dựng trường dòng nhiệt theo các phương x, y. Kết quả thể hiện trên Hình 6 - 7.

Kết quả trên Hình 6 cho thấy thành phần dòng nhiệt theo phương x (q_x) có giá trị âm trên toàn miền, cho thấy dòng nhiệt truyền từ vùng có nhiệt độ cao ở biên phải sang vùng có nhiệt độ thấp ở biên trái. Trong khi đó, thành phần dòng nhiệt theo phương y (q_y) biến thiên theo vị trí trong miền và có xu hướng giảm dần từ biên dưới lên biên trên. Điều này cho thấy vector dòng nhiệt có sự biến thiên theo cả hai phương không gian, tuy nhiên thành phần theo phương x chiếm ưu thế. Kết quả thu được phù hợp với phân bố trường nhiệt độ đã trình bày ở các hình trước và cho thấy phương pháp PINNs có khả năng xác định hiệu quả trường dòng nhiệt trong miền tính toán.

6. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, phương pháp mạng nơ-ron tích hợp thông tin vật lý (PINNs) đã được áp dụng để giải bài toán dẫn nhiệt ổn định của vật liệu đồng nhất trong không gian hai chiều. Mô hình PINNs được xây dựng nhằm xác định trường nhiệt độ và trường dòng nhiệt trong miền tính toán dựa trên các phương trình chi phối của quá trình dẫn nhiệt. Kết quả tính toán cho thấy phân bố nhiệt độ thu được từ phương pháp PINNs có sự phù hợp tốt với kết quả từ phương pháp phần tử hữu hạn (FEM). Sai khác giữa hai phương pháp là rất nhỏ, cho thấy độ chính xác và độ tin cậy của mô hình PINNs. Ngoài ra, từ trường nhiệt độ thu được, trường dòng nhiệt cũng được xác định hiệu quả theo định luật Fourier. Kết quả nghiên cứu cho thấy PINNs là một công cụ tiềm năng trong việc giải các bài toán dẫn nhiệt và có thể được mở rộng cho các bài toán phức tạp hơn như vật liệu nhiều pha, tính chất vật liệu biến thiên theo không gian.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] EL Wilson, RE Nickell. Application of the finite element method to heat conduction analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, no. 4, pp. 276-286, 1966, doi: 10.1016/0029-5493(66)90051-3.
- [2] Z Milka. Finite element solution of a stationary heat conduction problem with radiation boundary condition. *Applications of Mathematics*, no. 38, pp. 67-79, 1993, doi: dml.cz/dmlcz/104535.
- [3] MOR Siddiqui, D Sun. Finite element analysis of thermal conductivity and thermal resistance of woven fabrics. *Computational Materials Science*, no. 75, pp. 45-51, 2013, doi: 10.1016/j.commatsci.2013.04.003.
- [4]. Nguyễn Thị Hương Giang. Phương pháp số xác định hệ số dẫn ngang của vật liệu cốt sợi đồng phương. *Tạp chí Giao thông vận tải*, số. 6, tr. 26-28, 2021.
- [5] M Raissi, P Perdikaris, GE Karniadakis. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, no. 378, pp. 686-707, 2019, doi: 10.1016/j.jcp.2018.10.045.
- [6] L Qin, M Xuhui, EK George. Physics-informed neural networks for solving forward and inverse flow problems via the Boltzmann-BKG formulation. *Journal of Computational Physics*, no. 447, 2021, doi: 10.1016/j.jcp.2021.110676.
- [7] E Haghghat, M Raissi, A Moure, H Gomez, R Juanes. A physics-informed deep learning framework for inversion and surrogate modeling in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, no. 379, 2021, doi: 10.1016/j.cma.2021.113741.
- [8] S Cai, Z Mao, Z Wang, M Yin, GE Karniadakis. Physics-informed neural networks for heat transfer problems. *Journal of Heat Transfer*, no. 143(6), 2021, doi: 10.1115/1.4050542.